Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 90 minutos.

---

1) [**10 ptos.**] Mediante sumas de Riemann, calcule el valor de

$$\int_0^1 x^3 + \frac{3}{4}dx.$$

2) [**15 ptos.**] Sea f función continua y sea F función definida por

$$F(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt.$$

a) Encuentre una expresión para $F'(x)$.

b) Si $F(1) = 2$ y $F'(1) = 0$, calcule $f(1)$.

3) [**25 ptos.**]

a) [**10 ptos.**] Calcule el área de la región R, donde R es la región delimitada por las curvas $y = e^x$, $y = 2$ y el eje Y.

b) [**15 ptos.**] Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar la región S en torno a la recta $y = -1$, donde S es la región delimitada por las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - x$.

4) [**10 ptos.**] Calcule

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx.$$

DESARROLLO

1) Considerando una partición uniforme en n subintervalos con selectores iguales a los extremos derechos respectivos, se tiene que

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}$$
$$x_i = \frac{i}{n}$$

(3 pts.)

de donde resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 + \frac{3}{4}dx &= \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^3 + \frac{3}{4}\right)\frac{1}{n}\right) \text{ (3 pts.)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3}{4}n\right) \text{ (2 pts.)}\\ &= 1. \text{ (2 pts.)}\end{aligned}$$

2) a) De la definición de F se tiene que

$$F(x) = x\int_0^{x^2} f(t)dt. \text{ (2 pts.)}$$

Derivando a ambos lados de la igualdad se tiene por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$F'(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt + 2x^2 f(x^2) \text{ (6 pts.)}.$$

b) Como $F'(1) = 0$ entonces

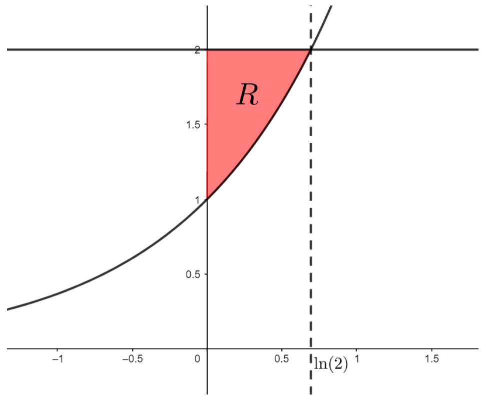
$$0 = \int_0^1 f(t)dt + 2f(1). \text{ (3 pts.)}$$

Por otra parte, como $F(1) = 0$ entonces

$$2 = \int_0^1 f(t)dt. \text{ (3 pts.)}$$

Combinando igualdades se tiene que $f(1) = -1$. (1 pto.)

3) a) La región R es la siguiente:

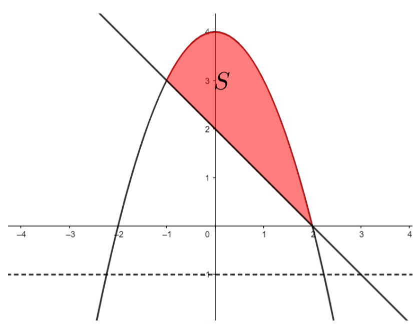


(3 pts.)

Viendo a R como una región sobre el eje X, se tiene que el área A de R es

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\ln(2)} 2 - e^x dx \text{ (3 pts.)} \\ &= (2x - e^x)\Big|_1^{\ln(2)} \text{ (3 pts.)} \\ &= 2\ln(2) - 1. \text{ (1 pt.)} \end{aligned}$$

b) La región S es la siguiente:



(6 pts. incluyendo la obtención de intersecciones de curvas)

Aplicando el método de los discos con eje de rotación $y = -1$ se tiene que el volumen V pedido está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{2} (4 - x^2 - (-1))^2 - (2 - x - (-1))^2 dx \text{ (4 pts.)} \\ &= \left(16x + 3x^2 - \frac{11x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{2} \text{ (3 pts.)} \\ &= \frac{153}{5}\pi. \text{ (2 ptos.)} \end{aligned}$$

4) Usando integración por partes con $u = \ln(x)$ y $dv = x^{-2}dx$ se obtiene que

$$\int x^{-2}\ln(x)dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C. \text{ (3 ptos.)}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} x^{-2}\ln(x)dx &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^b \text{ (2 pts.)}\\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{\ln(b)}{b} - \frac{1}{b} + \frac{\ln(1)}{1} + \frac{1}{1} \text{ (2 pts.)}\\
&= 1. \text{ (3 ptos.)}
\end{aligned}$$